

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक .....

नाम .....

131

324(XC)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट । पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
  - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
  - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
  - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
  - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

H985671

[ Turn over

324(XC)

2

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time, over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ , तो

$x$  का मान होगा

i)  $0, \frac{1}{2}$       ii)  $1, \frac{1}{2}$

iii)  $0$       iv)  $\frac{1}{2}$ .

1

H985671

ख) समाकलन  $\int x \sin x dx$  का मान होगा

- i)  $x \sin x + \cos x + c$   
 ii)  $x \cos x + \sin x + c$   
 iii)  $x \sin x - \cos x + c$   
 iv)  $\sin x - x \cos x + c$ .

ग) अवकल समीकरण

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + y = 0$$

- i) 1                      ii) 2  
 iii) 3                      iv) 4.

घ)  $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$  का मान है

- i) -1                      ii) 0  
 iii) 3                      iv) 1.

ङ) समुच्चय  $A = \{a, b\}$  में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

- i) 4                      ii) 16  
 iii) 8                      iv) 32.

1. Attempt all the parts :

a) If  $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ , then value of  $x$  will be

- i)  $0, \frac{1}{2}$                       ii)  $1, \frac{1}{2}$   
 iii) 0                      iv)  $\frac{1}{2}$ .

b) The value of the integral  $\int x \sin x dx$  will be

- i)  $x \sin x + \cos x + c$   
 ii)  $x \cos x + \sin x + c$   
 iii)  $x \sin x - \cos x + c$   
 iv)  $\sin x - x \cos x + c$ .

c) Order of the differential equation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + y = 0$$

- i) 1                      ii) 2  
 iii) 3                      iv) 4.

d) The value of

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$$

- i) -1                      ii) 0  
 iii) 3                      iv) 1.

e) The number of binary operations on the set  $A = \{a, b\}$  is

- i) 4                      ii) 16  
 iii) 8                      iv) 32.

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  से स्वयं तक सभी एकैकी फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए। 1

ख) यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  तथा

$A + A' = I$  हो, तो  $\alpha$  का मान है

- i)  $\frac{\pi}{6}$       ii)  $\frac{\pi}{3}$   
 iii)  $\pi$       iv)  $\frac{3\pi}{2}$       1

ग) सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = x^2$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  न तो एकैकी है और न आच्छादक है। 1

घ) दिखाइए कि  $f(x) = \sin(x^2)$  एक सतत फलन है। 1

ङ) यदि  $A$  तथा  $B$  स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा  $P(A) = \frac{3}{10}$ ,  $P(B) = \frac{4}{10}$  है, तो  $P(A \cap B)$  का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all the parts :

a) Find the number of all one-one functions from the set  $A = \{1, 2, 3\}$  to itself. 1

b) If  $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  and  $A + A' = I$ , then value of  $\alpha$  is

- i)  $\frac{\pi}{6}$       ii)  $\frac{\pi}{3}$   
 iii)  $\pi$       iv)  $\frac{3\pi}{2}$       1

c) Prove that the function  $f(x) = x^2$  defined on  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is neither one-one nor onto. 1

d) Show that  $f(x) = \sin(x^2)$  is a continuous function. 1

e) If  $A$  and  $B$  be two independent events and  $P(A) = \frac{3}{10}$ ,  $P(B) = \frac{4}{10}$ , then find the value of  $P(A \cap B)$ . 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  जहाँ

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ द्वारा परिभाषित}$$

फलन एकैकी तथा आच्छादक है। 2

ख) यदि  $e^y(1+x) = 1$  है, तो दिखाइए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \quad 2$$

ग) यदि सदिश  $(a\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$  तथा सदिश  $(3\hat{i}+b\hat{j})$  लम्बवत् हों, तो सिद्ध कीजिए कि  $3a+2b=0$ . 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है ? 2

3. Attempt all the parts :

a) Prove that the function

$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  where

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ is one-one}$$

and onto. 2

b) If  $e^y(1+x)=1$ , then show that

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \quad 2$$

c) If the vectors  $(a\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$  and  $(3\hat{i}+b\hat{j})$  are perpendicular, then prove that  $3a+2b=0$ . 2

d) There are two children in a family. It is known that at least one child is boy. Then find the probability that both children are boys. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) दिखाइए कि

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi. \quad 2$$

ख) यदि  $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  है, तो

सिद्ध कीजिए  $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ . 2

ग) यदि  $y = x^{\sin x}$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए। 2

घ) दिखाइए कि स्थिति सदिशों  $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$ ,  $-(\hat{j}+\hat{k})$ ,  $(3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k})$  तथा  $4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$  वाले क्रमशः चारों बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय हैं। 2

4. Attempt all the parts :

a) Show that

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi.$$

b) If  $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , then prove that  $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ . 2

c) If  $y = x^{\sin x}$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ . 2

d) Show that the position vectors of four points A, B, C and D are  $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ ,  $-(\hat{j} + \hat{k})$ ,  $(3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k})$  and  $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  respectively are coplanar. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  है, तो दिखाइए कि  $A^3 - 23A - 40I = 0$ . 5

ख) यदि  $R_1$  तथा  $R_2$  दो तुल्यता सम्बन्ध समुच्चय A में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि  $R_1 \cap R_2$  भी एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

ग) यदि  $\cos y = x \cos(a+y)$  तथा  $\cos a \neq \pm 1$ , तो सिद्ध कीजिए  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$ . 5

घ) रेखीय प्रोग्रामन समस्या का निम्न अवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :  $5x + 3y \leq 15$ ,  $2x + 5y \leq 10$  तथा  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $Z = 10x + 3y$  का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) दिखाइए कि पूर्णाकों के समुच्चय में  $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a-b) \text{ को } 7 \text{ विभाजित करता है}\}$  एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

च) सिद्ध कीजिए  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})) = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ . 5

5. Attempt any five parts of the following :

a) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , then show that

$$A^3 - 23A - 40I = 0. \quad 5$$

b) If  $R_1$  and  $R_2$  are two equivalence relations on a set  $A$ , then prove that  $R_1 \cap R_2$  is also an equivalence relation. 5

c) If  $\cos y = x \cos(a + y)$  and  $\cos a \neq \pm 1$ , then prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$ . 5

d) Solve the linear programming problem under the following constraints :  
 $5x + 3y \leq 15$ ,  $2x + 5y \leq 10$  and  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Find maximum value of  $Z = 10x + 3y$ . 5

e) Show that a relation  $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a - b) \text{ is divisible by } 7\}$  in the set of integers is an equivalence relation. 5

f) Prove that  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})) = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ . 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है। 5

ख) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{2(x+y)+3}$  का हल ज्ञात कीजिए। 5

ग) वक्र  $y = \cos(x + y)$ ,  $-2\pi < x < 2\pi$  की स्पर्श रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $x - 2y = 0$  के समान्तर है। 5

घ) यदि  $A$  तथा  $B$  स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो दिखाइए कि  $A$  या  $B$  में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता  $1 - P(A')P(B')$  होगी। 5

ङ)  $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$  को ज्ञात कीजिए। 5

च) फलन  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ ,  $\forall x \in [1, 3]$  के लिए मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 5

6. Attempt any five parts of the following :

a) Prove that the radius of a right circular cylinder inside a cone is half of the radius of cone. The right circular cylinder has maximum curved surface. 5

- b) Find the solution of the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{2(x+y)+3}$ . 5
- c) Find the equation of tangent lines of the curve  $y = \cos(x+y)$ ,  $-2\pi < x < 2\pi$  which is parallel to the line  $x - 2y = 0$ . 5
- d) If  $A$  and  $B$  be two independent events, then show that the probability of occurrence of at least one is  $1 - P(A')P(B')$ . 5
- e) Find  $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ . 5
- f) Verify mean value theorem for the function  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ ,  $\forall x \in [1, 3]$ . 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय  
 $x + y + z = 6$ ,  $y + 3z = 11$ ,  
 $x + z = 2y$  को आव्यूह विधि से हल  
 कीजिए। 8

- ख) i) यदि  $x^y = e^{x-y}$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$ . 4
- ii) यदि  $A$  तथा  $B$  दो सममित आव्यूह है तो सिद्ध कीजिए कि  $(AB - BA)$  एक विषम सममित आव्यूह होगा। 4
7. Attempt any one part of the following :  
 a) Solve the following system of equations by matrix method :  
 $x + y + z = 6$ ,  $y + 3z = 11$ ,  
 $x + z = 2y$ . 8
- b) i) If  $x^y = e^{x-y}$ , then prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$ . 4
- ii) If  $A$  and  $B$  be two symmetric matrices then prove that  $(AB - BA)$  is a skew-symmetric matrix. 4
8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :  
 क) उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो  $x = 0$  एवं  $x = 2\pi$  के मध्य वक्र  $y = \cos x$  से घिरा हुआ है। 8

ख) सदिश विधि से निम्न रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ तथा}$$

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$$

8

8. Attempt any one part of the following :

a) Find the area of the region of the curve  $y = \cos x$  bounded between  $x = 0$  and  $x = 2\pi$ .

8

b) Find the shortest distance between the following lines by vector method

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ and}$$

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$$

8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) i) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/4} \log \sin 2x \, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2.$$

4

ii) यदि  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  है, तो सिद्ध कीजिए

$$\text{कि } (1-x)^2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

4

ख) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग से

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए।}$$

8

9. Attempt any one part of the following :

a) i) Prove that

$$\int_0^{\pi/4} \log \sin 2x \, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2.$$

4

ii) If  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , then prove that

$$(1-x)^2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

4

b) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ by using elementary}$$

operations.

8

**324(XC)-1,25,000**